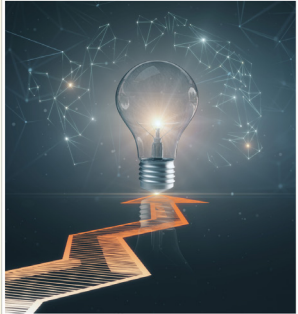


Rで学ぶ確率統計

第7回 統計的仮説検定①

1

Rで学ぶ確率統計



第7回

統計的仮説検定①

講師 秋光 淳生

2

第7回 統計的検定①

1

統計的検定の考え方

2

1 標本問題、2 標本問題の検定

3

Rによるシミュレーション

3

①-1 2種類の過誤

2つの過誤

		実際		
		陽性	陰性	
判定	陽性	真陽性 TP (True Positive)	偽陽性 FP (False Positive) 第一種過誤	・ 偽陽性率 $\frac{FP}{FP + TN}$
	陰性	偽陰性 FN (False Negative) 第二種過誤	真陰性 TN (True Negative)	・ 偽陰性率 $\frac{FN}{TP + FN}$

4

①-2 F値 (F尺度)

F値 (F尺度)

		実際		
		陽性	陰性	
判定	陽性	真陽性 TP	偽陽性 FP	・ 正解率 (精度: Accuracy) $\frac{TP + TN}{TP + FP + FN + TN}$
	陰性	偽陰性 FN	真陰性 TN	・ 適合率 (Precision) $\frac{TP}{TP + FP}$

・ F値 (F-measure)

$$\frac{2}{\frac{1}{Precision} + \frac{1}{Recall}} = \frac{2TP}{TP + 2(FP + FN)}$$

・ 再現率 (Sensitivity, 感度: Recall)

$$\frac{TP}{TP + FN}$$

・ 特異度 (Specificity)

$$\frac{TN}{FP + TN}$$

Rで学ぶ確率統計

第7回 統計的仮説検定①

5

①-3 統計的検定

統計的仮説検定

ある仮説を仮定し、そのもとで標本が抽出される確率を計算する
事前に定めた基準よりも低い場合にその仮説を正しくないと判断する

帰無仮説と対立仮説

帰無仮説：最初に設定する仮説
対立仮説：帰無仮説が正しくないと判断された場合に採択される仮説

帰無仮説と対立仮説

- 棄却
帰無仮説が正しくないと判断すること
- 有意水準
棄却するか判断するための確率
- 片側対立仮説と両側対立仮説
ある母数の値が正しいかどうかある値より大きい（小さいか）どうか
- 棄却域
帰無仮説を棄却する範囲
- 受容域
帰無仮説を棄却しない範囲

6

①-4 片側検定と両側検定(1)

(例) 右のようなベルヌイ試行を行う。

成功する確率は $p_0 = 0.5$ であると言われている。
試行を500回行うとき、5%以上で起こると思われる成功回数の範囲を考える。

帰無仮説 $H_0: p = p_0$

対立仮説の例

(1) 対立仮説 $H_0: p > p_0$

片側対立仮説

(2) 対立仮説 $H_0: p < p_0$

両側対立仮説

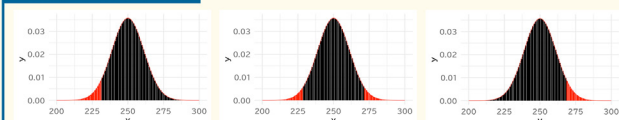
(3) 対立仮説 $H_1: p \neq p_0$



7

①-4 片側検定と両側検定(2)

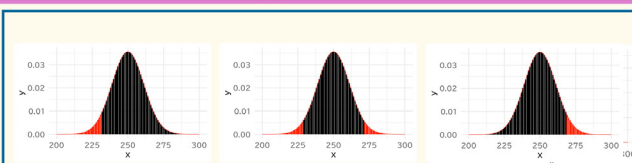
二項分布を正規分布で近似



```
prob <- 0.5; n <- 500; u0 <- n*prob; s0 <- sqrt(n*prob*(1-prob))
qnorm(0.025,mean=u0,sd=s0) # 228.0869
qnorm(0.05,mean=u0,sd=s0) # 231.61
qnorm(0.95,mean=u0,sd=s0) # 268.39
qnorm(0.975,mean=u0,sd=s0) # 271.9131
```

8

①-4 片側検定と両側検定(3)



```
i3 <- tibble(x=200:300,y=dbinom(200:300,n,prob),z=c(rep("Y",69),rep("N",32)))
ggplot(i3)+geom_bar(aes(x=x,y=y,fill=z),stat="identity")+
  stat_function(fun=dnorm,args=c(mean=u0,sd=s0),color="red") +
  theme(legend.position = "none")+
  scale_fill_manual(values = c("red","black"))
```

Rで学ぶ確率統計

第7回 統計的仮説検定①

9

①-4 片側検定と両側検定(4)

各試行の結果を

$$X_i = \begin{cases} 1 & i \text{ 回目} \text{ が 表} \\ 0 & i \text{ 回目} \text{ が 裏} \end{cases}$$

に対して

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

とすると

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

 $\hat{p}$ の分布は n や p_0 に依る z の分布は $N(0,1)$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う

10

①-5 統計的検定の手順

手順

対立仮説を設定する

帰無仮説を設定する

有意水準を設定する

検定統計量を求める

実現値から有意確率
(P-値) を求めて判断

母集団の母平均の検定

1. 1 標本問題
 - a. 分散が既知の場合
 - b. 分散が未知の場合
2. 対応のない 2 標本の母平均の差
 - a. 分散が等しい場合
 - b. 分散が異なると思われる場合
3. 対応のある 2 標本の母平均の差
4. 3 つ以上の場合 (分散分析)

11

①-6 統計的検定(1)

2つの過誤

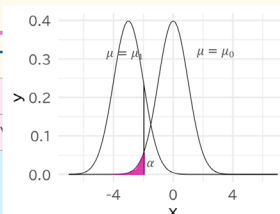
		実際	
		仮説 H_0 が正しい	仮説 H_0 が正しくない
判定	仮説 H_0 を棄却	第一種過誤 確率 α	正しい 確率 $1 - \beta$: 検出力
	仮説 H_0 を棄却しない	正しい 確率 $1 - \alpha$	第二種過誤 確率 β

12

①-6 統計的検定(2)

2つの過誤

		仮説 H_0 が正しい	
		第一種過誤 確率 α	第二種過誤 確率 β
判定	仮説 H_0 を棄却	第一種過誤 確率 α	第二種過誤 確率 β
	仮説 H_0 を棄却しない	正しい 確率 $1 - \alpha$	第二種過誤 確率 β



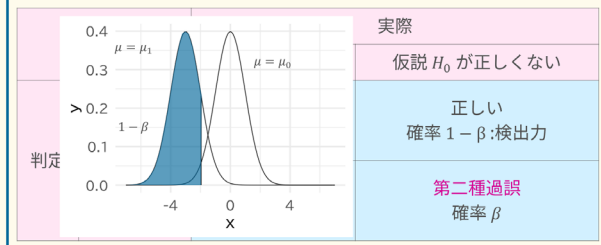
Rで学ぶ確率統計

第7回 統計的仮説検定①

13

①-6 統計的検定(2)

2つの過誤



14

②-1 分散が既知の1標本問題(1)

1標本問題 分散が既知の場合

いつも同じ惣菜を100g頼んでいるが、買った日によって微妙に量が異なる。そこで帰宅後に測定することにした。10回測定したところ

97.7g, 94.7g, 91.6g, 98.0g, 102.9g
94.5g, 99.1g, 95.3g, 93.8g, 102.0g

だった。誤差が5gと定められているらしい。この結果をどう判断するか？

15

②-1 分散が既知の1標本問題(2)

1標本問題 正規分布で検定

いつも同じ惣菜を100g頼んでいるが、買った日によって微妙に量が異なる。そこで帰宅後に測定することにした。10回測定したところ

97.7g, 94.7g, 91.6g, 98.0g, 102.9g
94.5g, 99.1g, 95.3g, 93.8g, 102.0g

だった。誤差が5gと定められているらしい。この結果をどう判断するか？

帰無仮説：盛り付けられる惣菜の量は正規分布 $N(100, 5^2)$ に従う
有意水準 5% で両側検定すると

$$Z = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)}{\sqrt{n}\sigma} = -1.922.. \quad P\text{値} = 0.055$$

であって $Z > -1.96$ なので棄却されない。

16

②-2 分散が未知の1標本問題

1標本問題 分散が未知の場合

いつも同じ惣菜を100g頼んでいるが、買った日によって微妙に量が異なる。そこで帰宅後に測定することにした。10回測定したところ

97.7g, 94.7g, 91.6g, 98.0g, 102.9g
94.5g, 99.1g, 95.3g, 93.8g, 102.0g

だった。この結果をどう判断するか？

Rで学ぶ確率統計

第7回 統計的仮説検定①

17

②-3 (復習) t 分布 (t Distribution) (1)

同じ正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うデータが
 n 個あるとき

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sqrt{n}\sigma}$$

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

とすると (W : 自由度 $n-1$)

$$t = \frac{Z}{\sqrt{W/(n-1)}}$$

は自由度 $n-1$ の t 分布 に従う

同じ正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うデータが
 n 個あるとき

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$$

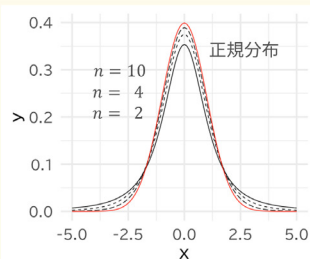
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

とすると

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\hat{\sigma}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

は自由度 $n-1$ の t 分布 に従う

18

②-3 (復習) t 分布 (t Distribution) (2)

同じ正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うデータが
 n 個あるとき

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

とすると

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\hat{\sigma}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

は自由度 $n-1$ の t 分布 に従う

19

②-4 分散が未知の1標本問題

1 標本問題 t 分布で検定

いつも同じ惣菜を100g 頼んでいるが、買った日によって微妙に量が異なる。
そこで帰宅後に測定することにした。10回測定したところ

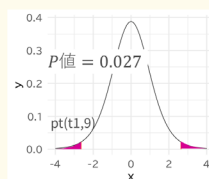
97.7g, 94.7g, 91.6g, 98.0g, 102.9g
94.5g, 99.1g, 95.3g, 93.8g, 102.0g

だった。この結果をどう判断するか？

帰無仮説：平均100g 自由度9 の t 分布
有意水準 5% で 検定すると

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = -\dots$$

であって $P = 0.027$ となって仮説が棄却される



20

②-5 2標本の差の検定

対応の有無

- 対応あるデータ
同じ測定対象から得られた標本
(例) 介入前後の比較等
- 対応のないデータ
異なる対象から抽出された標本
(例) クラスAとBの平均点の比較

正規分布の差の分布

$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

のとき

$X - Y \sim N(\mu_x - \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$

2標本の差の分布

- t 検定を行う (帰無仮説: $\mu = 0$)

対応のある2標本の母平均の差

$X - Y$ は分散が未知な正規分布
1標本の t 検定に帰着

対応のない2標本の母平均の差の分布

$\bar{X} \sim N(\mu_x, \sigma_x^2/n_1), \bar{Y} \sim N(\mu_y, \sigma_y^2/n_2)$

$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_x - \mu_y, \sigma_x^2/n_1 + \sigma_y^2/n_2)$

- 2標本の分散が等しい
スチューデントの t 検定
- 2標本の分散が等しくない
ウェルチの検定

Rで学ぶ確率統計

第7回 統計的仮説検定①

21

②-6 (復習) F 分布 (F Distribution)

F 分布

- 確率変数 W_1 が自由度 m_1 の χ^2 分布
- 確率変数 W_2 が自由度 m_2 の χ^2 分布
- 確率変数 W_1 と W_2 は互いに独立のとき

$$F = \frac{W_1/m_1}{W_2/m_2}$$

は自由度 (m_1, m_2) の F 分布に従う

- $X \sim F(m_1, m_2)$ と書く
- $F(m_1, m_2)$ の上側 (片右側) の $\alpha\%$ の確率を与える点を $F_{\alpha}(m_1, m_2)$ と書く

・それぞれ異なる正規分布に従う

$$X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad (i = 1, 2, \dots, n_1)$$

$$Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \quad (j = 1, 2, \dots, n_2)$$

$$W_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma_1^2}$$

$$W_2 = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{(Y_j - \bar{Y})^2}{\sigma_2^2}$$

とすると

$$F = \frac{W_1/(n_1 - 1)}{W_2/(n_2 - 1)}$$

は自由度 $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ の F 分布に従う

22

②-7 母分散の比の検定

母分散の比の検定

2つの独立な正規分布において、分散が等しいとすると

$$X_i \sim N(\mu_x, \sigma^2) \quad (i = 1, 2, \dots, n_1), \quad Y_j \sim N(\mu_y, \sigma^2) \quad (j = 1, 2, \dots, n_2)$$

において

$$W_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}, \quad W_2 = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{(Y_j - \bar{Y})^2}{\sigma^2}$$

から

$$F = \frac{W_1/(n_1 - 1)}{W_2/(n_2 - 1)} = \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_y^2}$$

分散の比は自由度 $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ の F 分布に従う

帰無仮説が棄却出来ないとき、等しくないとは言えないが、等しいとは限らない

23

②-8 2 標本の差の検定手順(1)

スチューデントの t 検定

2つの分散が等しい場合

$$\hat{\sigma}_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n_1 - 1}, \quad \hat{\sigma}_2^2 = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{(Y_j - \bar{Y})^2}{n_2 - 1}$$

から分散を推定

$$\hat{\sigma}_{pool}^2 = \frac{(n_1 - 1)\hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{\sigma}_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\hat{\sigma}_{pool} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_x - \mu_y, \sigma_x^2/n_1 + \sigma_y^2/n_2)$$

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\hat{\sigma}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

の値を用いて t 検定

24

②-8 2 標本の差の検定手順(2)

ウェルチの検定

2つの分散が等しくない場合

$$\hat{\sigma}_x^2 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n_1 - 1}, \quad \hat{\sigma}_y^2 = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{(Y_j - \bar{Y})^2}{n_2 - 1}$$

から

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_y^2}{n_2}}}$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_x - \mu_y, \sigma_x^2/n_1 + \sigma_y^2/n_2)$$

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\hat{\sigma}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

は近似的に自由度 df の t 分布に従う。ただし

$$df = \frac{(g_1^2 + g_2^2)}{\frac{g_1^2}{n_1 - 1} + \frac{g_2^2}{n_2 - 1}}, \quad g_1 = \frac{\hat{\sigma}_x^2}{n_1}, \quad g_2 = \frac{\hat{\sigma}_y^2}{n_2}$$

Rで学ぶ確率統計

第7回 統計的仮説検定①

25

③-1 1標本の母平均の検定

```
x <- c(97.7,94.7,91.6,98.0,102.9,94.5,99.1,95.3,93.8,102.0)
z1 <- sum(x-100)/(sqrt(10)*5)
t1 <- (mean(x)-100)/(sqrt(var(x))/sqrt(10)) # 分散が5としてz値を計算
y1 <- dt(t1,9) # t値を計算
p <- 2*pt(t1,9)
ggplot(data=data.frame(x=c(-4,4)), aes(x=x)) +
  stat_function(fun=dt,args=c(df=9))+
  geom_segment(x=t1,y=0,xend=t1,yend=y1,colour="red")+
  geom_segment(x=-t1,y=0,xend=-t1,yend=y1,colour="red")
t.test(x,mu=100) # mu=100 で母平均=100を検定
```

26

③-2 2標本の母平均の差の検定

```
subX <- c(66,73,65,64,59,64,66,63,64,74) # var.test が分散分析
subY <- c(61,64,69,65,70,76,74,82,79,72)
var.test(subX, subY) # paired 対応のあるなし
# var.equal 等分散かどうか

t.test(subX, subY,paired=FALSE, var.equal = FALSE)
t.test(subX, subY,paired=FALSE, var.equal = TRUE)
t.test(subX, subY, paired=TRUE)
```